



导学案★

主编 肖德好

全品

学练考

高中数学1

必修第一册 RJA

细分课时

分层设计

夯实基础

突出重点

天津出版传媒集团
天津人民出版社

目录 Contents

P 预备知识 初高中衔接

PREKNOWLEDGE

衔接一 数与式	导 211
衔接二 函数	导 213

01 第一章 集合与常用逻辑用语

PART ONE

1.1 集合的概念	导 216
1.2 集合间的基本关系	导 218
1.3 集合的基本运算	导 221
第 1 课时 集合的并集、交集/导 221	第 2 课时 集合的全集、补集/导 223
1.4 充分条件与必要条件	导 225
1.4.1 充分条件与必要条件	导 225
1.4.2 充要条件	导 226
1.5 全称量词与存在量词	导 228
1.5.1 全称量词与存在量词	导 228
1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定	导 229
① 本章总结提升	导 231

02 第二章 一元二次函数、方程和不等式

PART TWO

2.1 等式性质与不等式性质	导 234
第 1 课时 不等关系与不等式/导 234	第 2 课时 等式性质与不等式性质/导 235
2.2 基本不等式	导 237
第 1 课时 利用基本不等式求最值/导 237	第 2 课时 基本不等式的简单应用/导 239
2.3 二次函数与一元二次方程、不等式	导 240
第 1 课时 二次函数与一元二次方程、不等式/导 240	第 2 课时 一元二次不等式的简单应用/导 243
① 本章总结提升	导 245

03 第三章 函数的概念与性质

PART THREE

3.1 函数的概念及其表示	导 248
3.1.1 函数的概念	导 248
第 1 课时 函数的概念(一)/导 248	第 2 课时 函数的概念(二)/导 250
3.1.2 函数的表示法	导 252
第 1 课时 函数的表示法/导 252	第 2 课时 分段函数/导 255
3.2 函数的基本性质	导 257
3.2.1 单调性与最大(小)值	导 257
第 1 课时 函数的单调性/导 257	第 2 课时 利用单调性求最值/导 260
3.2.2 奇偶性	导 262
第 1 课时 奇偶性的概念/导 262	第 2 课时 奇偶性的应用/导 264
3.3 幂函数	导 266
3.4 函数的应用(一)	导 268
① 本章总结提升	导 270

04 第四章 指数函数与对数函数

PART FOUR

4.1 指数	导 274
4.1.1 n 次方根与分数指数幂	导 274
4.1.2 无理数指数幂及其运算性质	导 274
4.2 指数函数	导 276
4.2.1 指数函数的概念	导 276
4.2.2 指数函数的图象和性质	导 278
第 1 课时 指数函数的图象和性质/导 278	
第 2 课时 指数函数的图象及其性质的应用/导 280	
4.3 对数	导 283
4.3.1 对数的概念	导 283
4.3.2 对数的运算	导 285
4.4 对数函数	导 287
4.4.1 对数函数的概念	导 287
4.4.2 对数函数的图象和性质	导 289
第 1 课时 对数函数的图象和性质/导 289	
第 2 课时 对数函数的图象及其性质的应用/导 291	
4.4.3 不同函数增长的差异	导 293
4.5 函数的应用(二)	导 295
4.5.1 函数的零点与方程的解	导 295
4.5.2 用二分法求方程的近似解	导 297
4.5.3 函数模型的应用	导 298
④ 本章总结提升	导 302

05 第五章 三角函数

PART FIVE

5.1 任意角和弧度制	导 306
5.1.1 任意角	导 306
5.1.2 弧度制	导 309
5.2 三角函数的概念	导 311
5.2.1 三角函数的概念	导 311
5.2.2 同角三角函数的基本关系	导 314
5.3 诱导公式	导 317
第 1 课时 诱导公式(一)/导 317	
第 2 课时 诱导公式(二)/导 318	
5.4 三角函数的图象与性质	导 320
5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象	导 320
5.4.2 正弦函数、余弦函数的性质	导 322
第 1 课时 周期性与奇偶性/导 322	
第 2 课时 单调性、最大值与最小值/导 325	
5.4.3 正切函数的性质与图象	导 327
5.5 三角恒等变换	导 329
5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式	导 329
第 1 课时 两角差的余弦公式/导 329	
第 2 课时 两角和与差的正弦、余弦、正切公式/导 331	
第 3 课时 二倍角的正弦、余弦、正切公式/导 333	
5.5.2 简单的三角恒等变换	导 335
第 1 课时 三角函数式的化简与求值/导 335	
第 2 课时 三角函数公式的应用/导 337	
5.6 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$	导 339
5.6.1 匀速圆周运动的数学模型	导 339
5.6.2 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	导 339
第 1 课时 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象/导 339	
第 2 课时 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质的应用/导 342	
5.7 三角函数的应用	导 345
④ 本章总结提升	导 349

衔接一 数与式

【学习目标】

1. 理解绝对值的几何意义,会求含绝对值的方程与不等式.
2. 掌握因式分解的方法,并能熟练运用平方差和立方差公式.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 绝对值

1. 绝对值的意义

(1)代数意义:正数的绝对值是它本身,负数的绝对值是它的相反数,零的绝对值仍是零,即

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

(2)绝对值的几何意义:一个数的绝对值,是数轴上表示它的点到原点的距离.

2. 性质

$$(1) |a| \geq 0, |a| \geq a, |a| \geq -a;$$

$$(2) |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ 或 } a = -b;$$

$$(3) |a^2| = |a|^2 = a^2, |ab| = |a| \cdot |b|, \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0).$$

◆ 知识点二 常见的乘法公式与因式分解

1. 乘法公式

$$\text{平方差公式: } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$\text{完全平方公式: } (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$\text{立方和公式: } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$\text{立方差公式: } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$\text{三数和平方公式: } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac).$$

2. 因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式,像这样的式子变形叫作这个多项式的因式分解.

因式分解的常用方法:提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法、待定系数法和因式定理法.

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 解含绝对值的方程或不等式

例 1 解下列方程或不等式:

$$(1) |x - 3| = 2;$$

$$(2) |x - 2| < 3;$$

$$(3) |x - 1| + |x + 2| = 5;$$

$$(4) |2x - 1| < x + 2.$$

变式 1 解下列方程或不等式:

$$(1) |2x - 1| = x + 1;$$

$$(2) |x - 1| > |x + 2|.$$

变式 2 若关于 x 的不等式 $|kx - 1| \leq 5$ 的解是 $-3 \leq x \leq 2$, 则 k 的值是 _____.

◆ 探究点二 乘法公式的应用

例 2 化简下列各式:

- (1) $(-x-1)(x^2-x+1)$;
(2) $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$;
(3) $x(x-2)^2-(x^2-4x+4)(x+2)$.

例 3 (1) 已知 $a+b=3$, $ab=-8$, 求下列各式的值.

- ① a^2+b^2 ; ② a^2-ab+b^2 ; ③ $(a-b)^2$.
(2) 已知 $x+y=2$, 求 x^3+y^3+6xy 的值.

变式 1 化简下列各式:

- (1) $(3+2y)(9-6y+4y^2)$;
(2) $(x^3-1)(x^6+x^3+1)(x^9+1)$.

变式 2 (1) 已知 $x+y=1$, 求 x^3+y^3+3xy 的值;
(2) 已知 $a-b=2$, $ab=48$, 求 a^4+b^4 的值.

◆ 探究点三 因式分解

例 4 用合适的方法进行因式分解.

- (1) $2mn^4-162m$;
(2) $x^2+98y^2-21xy+x-7y$;
(3) $2ax-10ay+5by-bx$;
(4) x^3+2x^2-5x-6 .

变式 对下列各式进行因式分解:

- (1) a^5b-ab ;
(2) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$;
(3) $4x^2-2x+6xy-3y$;
(4) $x^4+x^2y^2+y^4$.

[素养小结]

因式分解的常用方法: 提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法. 需要熟记乘法公式.

衔接二 函数

【学习目标】

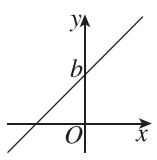
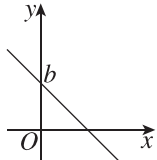
1. 熟练掌握一次函数、反比例函数和二次函数的图象和性质.
2. 理解函数的最值.
3. 会利用数形结合的方法求解相关问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

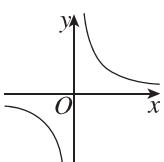
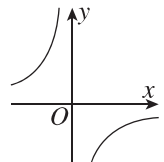
◆ 知识点一 一次函数、反比例函数、二次函数的图象与性质

1. 一次函数的图象与性质

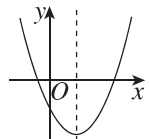
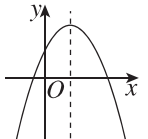
$y=kx+b(k \neq 0)$	$k > 0$	$k < 0$
图象		
性质	y 随 x 的增大而增大	y 随 x 的增大而减小

(b 是函数的图象与 y 轴交点的纵坐标)

2. 反比例函数的图象与性质

$y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$	$k > 0$	$k < 0$
图象		
性质	在每个象限, y 随 x 的增大而减小	在每个象限, y 随 x 的增大而增大

3. 二次函数的图象与性质

函数	$y=ax^2+bx+c(a, b, c \text{ 为常数}, a \neq 0)$	
	$a > 0$	$a < 0$
图象		
开口方向	向上	向下

(续表)

函数	$y=ax^2+bx+c(a, b, c \text{ 为常数}, a \neq 0)$	
对称轴	直线 $x=-\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$	
增减性	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时, y 有最小值, 且 $y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时, y 有最大值, 且 $y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

◆ 知识点二 函数图象的变换

函数图象的变换: 左加右减, 上加下减.

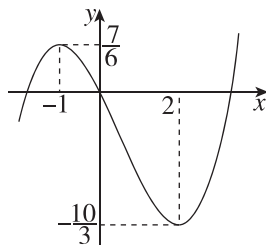
将 $y=2x^2-3$ 的图象向左平移 1 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度, 得到的图象对应的函数解析式是_____.

◆ 知识点三 函数的最值

函数的图象, 有上升的部分也有下降的部分, 像过山车一样, 图象上升时称函数递增, 图象下降时称函数递减.

如图, 当 $x < -1$ 或 $x > 2$ 时, 函数递增; 当 $-1 < x < 2$ 时, 函数递减.

函数图象最高点与最低点的纵坐标分别是函数的最大值与最小值.



◆ 探究点一 函数图象的变换

例 1 指出下列函数图象的变换过程.

从 $y = 3x^2$ 到 ① $y = 3(x+2)^2$; ② $y = 3x^2 - 4$;
③ $y = 3x^2 - 6x + 8$.

变式 指出下列函数图象的变换过程.

(1) 从 $y = 2x$ 到 ① $y = 2x - 4$; ② $y = 2(x+1)$;
③ $y = 2(x-1) + 3$.

(2) 从 $y = \frac{2}{x}$ 到 ① $y = \frac{2}{x+1}$; ② $y = \frac{2}{x} - 1$; ③ $y = \frac{2}{x-1} + 3$.

[素养小结]

平移变换:左加右减、上加下减,其中“左加右减”是对 x 进行加减,比如函数 $y = 3x + 1$ 的图象右移 2 个单位长度,得到的图象对应的函数解析式不是 $y = 3x - 2 + 1$,而是 $y = 3(x-2) + 1$,这个括号不能丢.

◆ 探究点二 二次函数的最值

角度一 定轴定区间

例 2 求函数 $y = x^2 - 4x + 1$ 在下列自变量取值范围内的最大值和最小值.

(1) $3 \leq x \leq 4$; (2) $0 \leq x \leq 1$; (3) $0 \leq x \leq 3$.

变式 已知函数 $y = -x^2 + 4x + a$, 其中 $0 \leq x \leq 1$, 若函数有最小值 -2 , 则函数的最大值为 _____.

角度二 动轴定区间

例 3 求 $y = x^2 - 2ax - 1$ 在 $0 \leq x \leq 2$ 时的最大值和最小值.

变式 已知函数 $y=x^2+ax$, 其中 a 是实数.

(1) 当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, 函数的最大值记为 M , 求 M 的表达式(用 a 表示);

(2) 当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, 函数的最小值记为 m , 求 m 的表达式(用 a 表示).

变式 当 $t \leq x \leq t+1$ 时, 求函数 $y=-2x^2-x+4$ 的最大值.

角度三 定轴动区间

例 4 当 $t \leq x \leq t+1$ 时, 求函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{2}$ 的最小值.

1.1 集合的概念

【学习目标】

1. 了解集合的含义,理解元素与集合的属于关系.
2. 能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 元素与集合的含义

1. 元素与集合的含义:一般地,我们把研究对象统称为_____,把一些元素_____叫作集合(简称为集).

2. 集合相等:只要构成两个集合的_____是一样的,我们就称这两个集合是相等的.

3. 符号表示:常用大写拉丁字母 A, B, C, \dots 表示集合,用小写拉丁字母 a, b, c, \dots 表示集合中的元素.

4. 元素与集合的关系:如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a _____ 集合 A , 记作 _____; 如果 _____, 就说 a 不属于集合 A , 记作 _____.

5. 常用数集及其记法:

常见的数集	符号表示
自然数集	_____
正整数集	_____ 或 _____
整数集	_____
有理数集	_____
实数集	_____

6. 集合中元素的三个性质为: _____、
_____, 无序性.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 中国著名的科学家可以组成一个集合. ()
- (2) 参加 2023 年杭州亚运会乒乓球比赛的球队可以组成一个集合. ()

(3) 不超过 2024 的非负数可以组成一个集合.

()

2. 某中学 2023 级高一年级共 8 个班,这 8 个班组成一个集合 A .

- (1) 高一(2)班、高二(8)班是集合 A 中的元素吗?
- (2) 若 $a \in A, b \in A$, 则元素 a, b 有什么关系? 为什么?

◆ 知识点二 集合的表示法

1. 列举法:把集合的所有元素一一列举出来,并用 _____ 括起来表示集合的方法叫作列举法(注意元素间要用“,”隔开,如 $\{-1, 0, 1, 2\}$).

2. 描述法:设 A 是一个集合,把集合 A 中所有具有 _____ 特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为 _____, 这种表示集合的方法称为描述法. 描述法也可以写成 _____ 或 _____.

【诊断分析】1. 方程 $(x+1)(x-2)=0$ 的实数根组成的集合中有多少个元素? 并用适当的方法表示这个集合.

2. 由抛物线 $y=x^2$ 上的点组成的集合中有多少个元素? 并用适当的方法表示这个集合.

◆ 探究点一 元素与集合的含义

例 1 (1)下列各项中,不可以组成集合的是 ()

- A. 所有的正数
B. 方程 $x^2=1$ 的实数根
C. 接近于 0 的数
D. 不等于 0 的偶数

(2)(多选题)下列各组对象可以组成集合的是 ()

- A. 二十四节气
B. 2024 年高考数学难题
C. 中国科学院院士(截至 2023 年 8 月)
D. 中国的自治区

例 2 (1)用符号“ \in ”或“ \notin ”填空: 0 _____ \mathbf{N} ;

$\frac{1}{3}$ _____ \mathbf{Q} ; 2.4 _____ \mathbf{Z} ; $\sqrt{3}$ _____ \mathbf{Q} ;
 4 _____ \mathbf{Z} .

(2)已知集合 A 是由形如 $m+\sqrt{3}n$ (其中 $m, n \in \mathbf{Z}$) 的数组成的,则下列数中属于集合 A 的是 _____ . (填序号)

① $2-\sqrt{3}$; ② 5 ; ③ $\frac{1}{\sqrt{3}+4}$; ④ $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}+1$.

变式 (1)(多选题)下列说法正确的是 ()

- A. \mathbf{N}^* 中最小的数是 1
B. 若 $-a \notin \mathbf{N}^*$, 则 $a \in \mathbf{N}^*$
C. 若 $a \in \mathbf{N}^*$, $b \in \mathbf{N}^*$, $a \neq b$, 则 $a+b$ 的最小值是 3
D. $x^2+4=4x$ 的实数解组成的集合中含有 2 个元素

(2)设集合 M 满足: ① $2 \notin M$; ② 若 $x \in M$, 则 $\frac{2}{2-x} \in M$. 已知 $3 \in M$, 则 M 中必含有的元素是 _____ .

[素养小结]

(1)判断元素能否组成集合,关键是集合中元素的确定性,即能否找到一个明确的评判标准来衡量元素是否为集合中的元素,若标准明确则可以组成集合,否则不可以.

(2)判断一个元素是否属于某一集合,就是判断这个元素是否满足该集合元素的条件.若满足,就是“属于”关系;若不满足,就是“不属于”关系.特别注意,符号“ \in ”与“ \notin ”只表示元素与集合的关系.

◆ 探究点二 集合中元素的特性

例 3 (1)英文单词 excellent 的所有字母组成的集合中共有 ()

- A. 6 个元素
B. 7 个元素
C. 8 个元素
D. 9 个元素

(2)已知集合 $A = \{12, a^2+4a, a-2\}$, 且 $-3 \in A$, 则 $a =$ ()

- A. -1
B. -3 或 -1
C. 3
D. -3

变式 (1)已知集合 A 中含有三个元素 $x, x+1, 1$, 集合 B 中含有三个元素 x, x^2+x, x^2 , 且 A 与 B 中的元素相同,则实数 x 的值为 _____ .

(2)若集合 $\{x | ax^2+2x+1=0\}$ 中只含有一个元素 b , 则 b 的值为 _____ .

[素养小结]

(1)对于求集合中字母参数的问题,常根据集合中元素的确定性得出字母的所有可能取值,再利用集合中元素的互异性进行检验.

(2)在利用集合中元素的特性解题时常用分类讨论思想,注意分类的标准要明确.

◆ 探究点三 集合的表示

角度一 列举法表示集合

例 4 用列举法表示下列集合.

- (1)中国的直辖市组成的集合;
(2)15 的正约数组成的集合;
(3)方程 $x^2=x$ 的所有实数解组成的集合;
(4)直线 $y=x$ 与 $y=2x-1$ 的交点组成的集合;
(5)满足 $-2 \leq x \leq 3$ 且 $x \in \mathbf{Z}$ 的数组成的集合.

[素养小结]

用列举法表示集合应注意的三点:

(1)应先弄清集合中的元素是什么,是数还是点,还是其他元素;

(2)集合中的元素一定要写全,但不能重复;

(3)若集合中的元素是点,则应将有序实数对用小括号括起来表示一个元素.

角度二 描述法表示集合

例 5 用描述法表示下列集合.

(1)二次函数 $y=x^2+1$ 的函数值组成的集合 A ;

(2)被 3 除余 2 的正整数组成的集合 B ;

(3)正奇数组成的集合 C .

变式 用适当的方法表示下列集合.

(1)绝对值小于 5 的全体实数组成的集合;

(2)由所有小于 13 的既是奇数又是素数的自然数组成的集合;

(3)除以 3 余 1 的所有整数组成的集合;

(4)抛物线 $y=x^2$ 上点的纵坐标组成的集合;

(5)二次函数 $y=x^2+2x-10$ 的图象上所有的点组成的集合.

[素养小结]

(1)用描述法表示集合,应先弄清集合的属性,是数集、点集还是其他的类型.一般地,数集用一个字母代表其元素,而点集则用一个有序实数对来代表其元素.

(2)若描述部分出现元素记号以外的字母时,则要对新字母说明其含义或指出其取值范围.

1.2 集合间的基本关系

【学习目标】

1. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
2. 能使用 Venn 图表达集合的基本关系,体会图形对理解抽象概念的作用.
3. 在具体情境中,了解空集的含义.

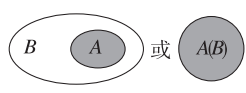
(续表)

课 前 预 习

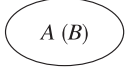
知识导学 素养初识

◆ 知识点一 子集


定义	一般地,对于两个集合 A, B , 如果集合 A 中 _____ 元素都是集合 B 中的元素, 就称集合 A 为集合 B 的子集
记法与读法	记作 _____ (或 _____), 读作“ A 包含于 B ”(或“ B 包含 A ”)

Venn 图	在数学中, 经常用平面上封闭曲线的 _____ 代表集合, 这种图称为 Venn 图
图示	
结论	(1)反身性: 任何一个集合是它本身的子集, 即 $A \subseteq A$; (2)传递性: 对于集合 A, B, C , 若 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$

◆ 知识点二 集合的相等关系

定义	一般地,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,那么集合 A 与集合 B 相等
记法	记作 _____
符号表示	若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$
图示	

◆ 知识点三 真子集

定义	如果集合 $A \subseteq B$, 但存在元素 _____, 且 _____, 就称集合 A 是集合 B 的真子集
记法与读法	记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$), 读作“ A 真包含于 B ” (或“ B 真包含 A ”)
图示	
结论	(1) $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$; (2) $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则 $A \subsetneq B$

◆ 知识点四 空集

定义	一般地,我们把 _____ 的集合叫作空集
记法	记为 \emptyset
规定	空集是任何集合的 _____, 即 $\emptyset \subseteq A$
特性	(1) 空集只有一个子集, 即它的本身, $\emptyset \subseteq \emptyset$; (2) 若 $A \neq \emptyset$, 则 $\emptyset \subsetneq A$

【诊断分析】 1. 判断正误。(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) $\{0\} \subseteq \{x | x < 5, x \in \mathbf{R}\}$. ()
 (2) 设 $A = \{x | x \text{ 是三角形}\}$, 则 $A \subseteq A$. ()
 (3) $0 \subseteq \{-1, 0, 1\}$. ()
 (4) 已知 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, b, a\}$, 则 $A \neq B$. ()
 (5) 设 A 是一个集合, 则 $A \subsetneq A$. ()

2. 符号“ \in ”与“ \subseteq ”的区别是什么?

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 集合间关系的判断

例 1 判断下列每对集合之间的关系.

- (1) $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{N}\}$, $B = \{y | y = 4m, m \in \mathbf{N}\}$;
 (2) $C = \{1, 2, 3, 4\}$, $D = \{x | x \text{ 是 } 12 \text{ 的约数}\}$;
 (3) $E = \{x | x > 3 \text{ 且 } x < -1\}$, $F = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$.

变式 (1) [2024 · 福建三明一中高一月考] 下列关系正确的是 ()

- A. $a \subseteq \{a, b, c\}$ B. $\emptyset \in \{0\}$
 C. $\{0, 1\} \subsetneq \mathbf{N}$ D. $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$

(2) [2024 · 辽宁六校协作体高一联考] 已知集合

$$A = \left\{x \mid x = \frac{a}{2} + \frac{1}{6}, a \in \mathbf{Z}\right\}, B = \left\{x \mid x = \frac{b}{2} - \frac{1}{3}, b \in \mathbf{Z}\right\},$$

$$C = \left\{x \mid x = c + \frac{1}{6}, c \in \mathbf{Z}\right\}, \text{ 则 } A, B, C \text{ 之间的}$$

关系正确的是 ()

- A. $A = B \supseteq C$ B. $A = B \subseteq C$
 C. $A = B = C$ D. $A \subseteq B = C$

【素养小结】

判断集合间关系的方法:

(1) 用定义判断.

首先, 判断一个集合 A 中的任意元素是否属于另一个集合 B , 若是, 则 $A \subseteq B$, 否则 A 不是 B 的子集; 其次, 判断另一个集合 B 中的任意元素是否属于第一个集合 A , 若是, 则 $B \subseteq A$, 否则 B 不是 A 的子集; 若既有 $A \subseteq B$, 又有 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

(2) 数形结合判断.

对于不等式表示的数集, 可在数轴上标出集合的元素, 直观地进行判断, 但要注意端点值的取舍.

◆ 探究点二 集合的子集、真子集

例 2 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集和真子集, 并写出子集和真子集的个数. 试猜想含 n 个元素的集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的所有子集的个数是多少? 真子集的个数及非空真子集的个数呢?

变式 (1) [2024 · 福建泉州一中高一月考] 集合

$A = \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} y = x, \\ y = x^2 \end{cases} \right. \right\}$, 则集合 A 的真子集个数为 _____.

(2) 已知集合 M 满足 $\{1, 2\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 写出所有满足条件的集合 M .

[素养小结]

求集合的子集问题的一般方法: 求给定集合的子集(真子集)时, 一般按照子集所含元素的个数分类, 再依次写出符合要求的子集(真子集). 在写子集时, 注意不要忘记空集和集合本身.

◆ 探究点三 由集合间的关系求参数

例 3 (1) [2024 · 四川绵阳高一期中] 已知集合 $A = \{x | 0 < x < 2\}$, $B = \{x | 1 < x < a\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 2$ B. $a < 2$
C. $1 < a \leq 2$ D. $a \leq 2$

(2) [2024 · 福建厦门双十中学高一月考] 设 $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $B = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值组成的集合 $C =$ _____.

变式 1 设非空集合 $A = \{x | -2 < x \leq m - 3n\}$, $B = \{x | 3m + n < x \leq 2\}$. 若 $A = B$, 则实数 $m =$ _____, $n =$ _____.

变式 2 已知集合 $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$, $B = \{x | 2a \leq x \leq a + 3\}$, 若 $B \not\subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

[素养小结]

由集合间的关系求参数问题的注意点及常用方法:

(1) 注意点: ①不能忽视集合为 \emptyset 的情形; ②当集合中含有字母参数时, 一般需要分类讨论.

(2) 常用方法: 对于用不等式给出的集合, 已知集合的包含关系求相关参数的范围(值)时, 常采用数形结合的思想, 借助数轴解答.

1.3 集合的基本运算

第1课时 集合的并集、交集

【学习目标】

1. 理解并集、交集的概念,会用文字语言、符号语言及图形语言来描述这些概念.
2. 了解并集、交集的一些简单性质,会求两个简单集合的并集与交集.
3. 能使用 Venn 图表达集合的并集与交集.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 集合的并集

1. 并集的三种语言表示:

文字语言	一般地,由所有_____的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集,记作_____ (读作“ A 并 B ”)
符号语言	$A \cup B = \{x \underline{\hspace{2cm}}\}$
图形语言	

2. 并集的运算性质

- (1) $A \cup A = A$; (2) $A \cup \emptyset = A$; (3) $A \cup B = B \cup A$; (4) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$, 反之也成立.

◆ 知识点二 集合的交集

1. 交集的三种语言表示:

文字语言	一般地,由所有属于_____的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的交集,记作_____ (读作“ A 交 B ”)
符号语言	$A \cap B = \{x \underline{\hspace{2cm}}\}$
图形语言	

2. 交集的运算性质

- (1) $A \cap A = A$; (2) $A \cap \emptyset = \emptyset$; (3) $A \cap B = B \cap A$; (4) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$, 反之也成立.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 设 $A = \{x \in \mathbf{N} | x < 5\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 则 $A \cup B = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 5\}$. ()

(2) 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, 则 A 与 B 的交集为空集. ()

(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. ()

(4) 若 $x \in (A \cap B)$, 则 $x \in (A \cup B)$. ()

(5) 若 $x \in (A \cup B)$, 则 $x \in (A \cap B)$. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 并集及其运算

例 1 (1) 设集合 $A = \{4, 5, 6, 8\}$, $B = \{3, 5, 7, 8\}$, 则集合 $A \cup B =$ ()

- A. $\{5, 8\}$ B. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
C. $\{4, 6\}$ D. $\{3, 4, 6, 7\}$

(2) 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$, 那么 $A \cup B =$ ()

- A. $\{x | -2 \leq x \leq 4\}$
B. $\{x | x \leq 3 \text{ 或 } x > 4\}$
C. $\{x | -2 \leq x \leq -1\}$
D. $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$

(3) 满足条件 $M \cup \{2\} = \{1, 2, 4\}$ 的集合 M 的个数是 ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

变式 (1) 若 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{y | y = 2x, x \in A\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{0, 2, 4, 6\}$ B. $\{0, 2\}$
C. $\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ D. $\{0, 1, 2, 3, 0, 2, 4, 6\}$

(2) (多选题) [2024 · 四川成都七中高一期中] 设集合 $A = \{x | (x - 2)(x + a) = 0, a \in \mathbf{R}\}$, $B =$

$\{x \in \mathbf{N} | \frac{6}{x-1} \geq 2\}$, 则 $A \cup B$ 中的元素个数可以是 ()

- A. 3 B. 4
C. 5 D. 6

[素养小结]

并集运算应注意的问题:

- (1) 对于用描述法表示的集合, 应先看集合的代表元素是什么, 然后将集合化简, 再按定义求解.
- (2) 求两个集合的并集时要注意利用集合中元素的互异性这一属性, 重复的元素只能算一个.
- (3) 对于元素个数无限的集合进行并集运算时, 可借助数轴, 利用数轴分析法求解, 但要注意端点的值能否取到.

◆ 探究点二 交集及其运算

例 2 (1) 若集合 $A = \{x | -5 < x < 2\}$, $B = \{x | -3 < x < 3\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- $\{x | -3 < x < 2\}$
- $\{x | -5 < x < 2\}$
- $\{x | -3 < x < 3\}$
- $\{x | -5 < x < 3\}$

(2) 设集合 $A = \{-2, 2\}$, $B = \{x | x^2 - 5x - m = 0\}$. 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $B =$ ()

- $\{-2, 3\}$
- $\{2\}$
- $\{-2, 2\}$
- $\{2, 3\}$

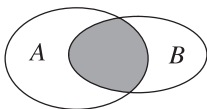
变式 (1) 已知集合 $A = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{6, 8, 10, 12, 14\}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()

- 5
- 4
- 3
- 2

(2) [2024 · 深圳高一期中] 已知集合 $A = \{(x, y) | y = x\}$, $B = \{(x, y) | y = 5 - 4x\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- $(1, 1)$
- $\{(1, 1)\}$
- $(-1, -1)$
- $\{(-1, -1), (1, 1)\}$

(3) 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + x - 6 = 0\}$, 则图中阴影部分表示的集合为 ()



- $\{2\}$
- $\{3\}$
- $\{-3, 2\}$
- $\{-2, 3\}$

[素养小结]

求集合 $A \cap B$ 的常见类型:

- ① 若 A, B 中的元素是方程的根, 则应先解方程求出方程的根, 再求两集合的交集.
- ② 若 A, B 中的元素是有序实数对, 则 $A \cap B$ 是指两个方程组成的方程组的解集, 交集是点集.
- ③ 若 A, B 是无限数集, 则可以利用数轴来求解, 但要注意利用数轴表示不等式时, 含有端点的值用实心点表示, 不含有端点的值用空心圈表示.

◆ 探究点三 根据并集与交集运算求参

例 3 已知集合 $A = \{x | -3 < x \leq 4\}$, 集合 $B = \{x | k + 1 \leq x \leq 2k - 1\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 k 的取值范围.

变式 (1) [2024 · 江苏扬州五校高一联考] 设 a 为实数, $A = \{x | 1 \leq x < 4\}$, $B = \{x | x \leq a\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围是_____.

(2) 若集合 $A = \{x | 2a \leq x < a + 1\}$, $B = \{x | 1 - x < 0\}$, 且 $A \cap B = A$, 则实数 a 的取值范围是_____.

[素养小结]

(1) 在利用交集、并集的性质解题时, 常常会遇到 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ 这类问题, 解答时常借助于交、并集的定义以及集合间的关系去分析, 如由 $A \cap B = A$ 得 $A \subseteq B$, 由 $A \cup B = B$ 得 $A \subseteq B$ 等.

(2) 当集合 $B \subseteq A$ 时, 如果集合 A 是一个确定的集合, 而集合 B 不确定, 那么运算时要考虑 $B = \emptyset$ 的情况.

第 2 课时 集合的全集、补集

【学习目标】

1. 在具体情境中,了解全集的含义.
2. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
3. 能使用 Venn 图表示集合的基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 全集

(1)定义:一般地,如果一个集合含有所研究问题中涉及的 _____,那么就称这个集合为全集.


(2)记法:全集通常记作 _____.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在集合运算中,全集一定是实数集 \mathbf{R} . ()

(2)为了研究集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 3, 5\}$ 之间的关系,要从中选一个集合作为全集,这个集合是 A . ()

◆ 知识点二 补集的概念及性质

定义	文字语言	对于一个集合 A ,由全集 U 中 _____ 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集,记作 _____
	符号语言	$\complement_U A = \{x \mid \underline{\hspace{2cm}}\}$
	图形语言	
性质	(1) $\complement_U A \subseteq U$; (2) $\complement_U U = \underline{\hspace{2cm}}$, $\complement_U \emptyset = \underline{\hspace{2cm}}$; (3) $\complement_U (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$; (4) $A \cup (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$, $A \cap (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$	

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)一个集合的补集一定含有元素. ()

(2)设全集 $U = \mathbf{R}$,存在 $x_0 \in U$, $x_0 \notin A$,且 $x_0 \notin \complement_U A$. ()

(3)设全集 $U = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $A = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ 且 } y > 0\}$,则 $\complement_U A = \{(x, y) \mid x \leq 0 \text{ 且 } y \leq 0\}$. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 补集的简单运算

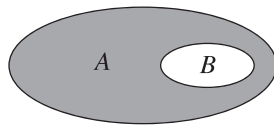
例 1 (1)已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}$,则 $\complement_U M =$ ()

- A. 5 B. $\{5\}$
 C. $\{3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

(2)已知集合 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x > 2\}$,则 $\complement_U A =$ ()

- A. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$
 B. $\{x \mid -1 < x \leq 2\}$
 C. $\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$
 D. $\{x \mid -1 < x < 2\}$

变式 (1)集合 $A = \{x \mid y = \sqrt{x-1}\}$, $B = \{y \mid y = x^2 + 2\}$,则图中阴影部分表示的集合为 ()



- A. $\{x \mid x \geq 1\}$
 B. $\{x \mid x \geq 2\}$
 C. $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$
 D. $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$

(2)已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $\complement_U A = \{2, 4, 6\}$, $\complement_U B = \{1, 4, 6\}$,则集合 $B =$ _____.

【素养小结】

求集合的补集的方法:

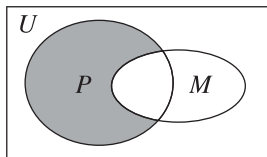
(1)定义法:当集合中的元素较少时,可利用定义直接求解.

(2)Venn 图法:借助 Venn 图可直观地求出补集.

(3)数轴法:当集合中的元素连续且无限时,可借助数轴求解,此时需注意端点取值.

◆ 探究点二 并集、交集、补集的综合运算

例 2 (1) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $P = \{x \mid -1 < x \leq 8, x \in \mathbf{Z}\}$, $M = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq -2 \text{ 或 } x > 5\}$, Venn 图如图所示,



则阴影部分所表示的集合中的元素共有 ()

A. 8 个 B. 6 个 C. 5 个 D. 4 个

(2) [2024 · 长沙高一期中] 已知集合 $U = \{x \mid 1 < x \leq 7\}$, $A = \{x \mid 2 \leq x < 5\}$, $B = \{x \mid 3 \leq x < 7\}$.

求: ① $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$; ② $\complement_U (A \cap B)$.

变式 (1) (多选题) [2024 · 湖北宜都一中高一期中] 已知集合 $A = \{x \mid x < 2\}$, $B = \{x \mid 3 - 2x > 0\}$, 则 ()

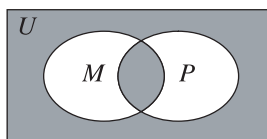
A. $A \cap B = \{x \mid x < \frac{3}{2}\}$

B. $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x \mid \frac{3}{2} \leq x < 2\}$

C. $A \cup B = \{x \mid x < \frac{3}{2}\}$

D. $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B = \mathbf{R}$

(2) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{1, 3, 6\}$, $P = \{3, 4, 5\}$, 则如图所示的



Venn 图中阴影部分表示的集合是_____.

[素养小结]

(1) 解决与集合的交、并、补集运算有关的综合问题时, 一般先运算括号内的部分, 如求 $(\complement_U A) \cap B$ 时, 可先求出 $\complement_U A$, 再求交集; 求 $\complement_U (A \cup B)$ 时, 可先求出 $A \cup B$, 再求补集.

(2) 不等式中的等号在补集中能否取到, 要引起重视, 还要注意补集是全集的子集.

◆ 探究点三 利用集合间的关系求参

例 3 已知集合 $A = \{x \mid a < x < a + 1\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$.

(1) 若 $a = 1$, 求 $A \cup B$;

(2) 在 ① $A \cup B = B$, ② $(\complement_{\mathbf{R}} B) \cap A = \emptyset$, ③ $B \cup (\complement_{\mathbf{R}} A) = \mathbf{R}$ 这三个条件中任选一个作为已知条件, 求实数 a 的取值范围.

变式 (1) [2024 · 重庆一中高一月考] 设全集 $U = \{1, 3, m^2 + m - 9\}$, 集合 $A = \{1, m\}$, $\complement_U A = \{3\}$, 则实数 $m =$ _____.

(2) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid a + 1 \leq x \leq 2a - 1\}$, 且 $A \subseteq \complement_U B$, 求实数 a 的取值范围.

[素养小结]

由集合的补集求解参数的方法:

(1) 当集合中元素个数有限时, 可利用补集定义并结合集合知识求解.

(2) 当集合中元素个数无限时, 一般利用数轴分析法求解.

1.4 充分条件与必要条件

1.4.1 充分条件与必要条件

【学习目标】

1. 通过对典型数学命题的梳理,理解充分条件的意义,理解判定定理与充分条件的关系.
2. 通过对典型数学命题的梳理,理解必要条件的意义,理解性质定理与必要条件的关系.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 充分条件与必要条件

	“若 p , 则 q ”为真命题	“若 p , 则 q ”为假命题
推出关系	p _____ q	p _____ q
条件关系	p 是 q 的 _____ 条件 q 是 p 的 _____ 条件	p 不是 q 的 _____ 条件 q 不是 p 的 _____ 条件
定理关系	判定定理给出了相应数学结论成立的充分条件; 性质定理给出了相应数学结论成立的必要条件	

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)“ $x^2=y^2$ ”是“ $x=y$ ”的充分条件. ()
- (2)“ $ab=0$ ”是“ $b=0$ ”的必要条件. ()
- (3)“内错角相等”是“两直线平行”的充分条件. ()
- (4)“ $x=1$ 或 $x=2$ ”是“ $x^2-3x+2=0$ ”的必要条件. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 充分条件、必要条件的判断

例 1 下列“若 p , 则 q ”形式的命题中,哪些命题中的 p 是 q 的充分条件?

- (1)若 $4x^2-mx+9$ 是完全平方式,则 $m=12$;
- (2)若 $(x-1)^2+(y-2)^2=0$,则 $(x-1)(y-2)=0$;
- (3)在 $\triangle ABC$ 中,若 $A+B=90^\circ$,则 $C=90^\circ$.

例 2 下列各题中,哪些 q 是 p 的必要条件?

- (1) $p:x=1, q:x-1=\sqrt{x-1}$;
- (2) $p:-2\leq x\leq 5, q:-1\leq x\leq 5$;
- (3) $p:a$ 是自然数, $q:a$ 是正整数;
- (4) p : 三角形是等边三角形, q : 三角形是等腰三角形.

变式 下列各题中,哪些 p 是 q 的充分条件? 哪些 p 是 q 的必要条件?

- (1) $p:a=b, q:ac=bc$;
- (2) $p:A\cap B=A, q:A\subseteq B$.
- (3) p : 一个四边形是矩形, q : 这个四边形的对角线相等.

[素养小结]

充分条件、必要条件的几种判定方法:

- (1)定义法:根据 $p\Rightarrow q, q\Rightarrow p$ 进行判断,适用于定义、定理的判断性问题.
- (2)集合法:根据 p, q 成立的对象组成的集合之间的包含关系进行判断,多适用于命题中涉及参数范围的推断问题.

◆ 探究点二 充分条件、必要条件的应用

例 3 设全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|1\leq x\leq 5\}$, 非空集合 $B=\{x|2-a\leq x\leq 1+2a\}$.

(1) 若“ $x\in A$ ”是“ $x\in B$ ”的充分条件, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若“ $x\in A$ ”是“ $x\in B$ ”的必要条件, 求实数 a 的取值范围.

变式 (1) [2024·华东师大附中高一月考] 若不等式 $|x+a|\leq 3$ 成立的一个充分不必要条件是 $2\leq x\leq 3$, 则实数 a 的取值范围为_____.

(2) 已知集合 $P=\{x|-2<x<4\}$, $Q=\{x|3m-2\leq x\leq 5m+2, m\in\mathbf{R}\}$. 若“ $x\in Q$ ”的必要条件为“ $x\in P$ ”, 则实数 m 的取值范围为_____.

[素养小结]

根据充分条件、必要条件求参数的取值范围时, 主要根据充分条件、必要条件与集合间的关系, 将问题转化为相应的两个集合之间的包含关系, 然后建立关于参数的不等式(组)进行求解, 有时还需要借助数轴解决问题.

1.4.2 充要条件

【学习目标】

通过对典型数学命题的梳理, 理解充要条件的意义, 理解数学定义与充要条件的关系.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 充要条件的概念

1. 逆命题

将命题“若 p , 则 q ”中的条件 p 和结论 q 互换, 就得到一个新的命题“若 q , 则 p ”, 称这个命题为原命题的逆命题.

2. 充要条件

如果“若 p , 则 q ”和它的逆命题“若 q , 则 p ”均是真命题, 即既有 $p\Rightarrow q$, 又有 $q\Rightarrow p$, 就记作_____.

此时, p 既是 q 的充分条件, 也是 q 的必要条件, 我们说 p 是 q 的_____, 简称为_____. 显然, 如果 p 是 q 的充要条件, 那么 q 也是 p 的充要条件. 概括地说, 如果 $p\Leftrightarrow q$, 那么 p 与 q _____.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 已知 p : 两个角是对顶角, q : 两个角相等, 则 p 是 q 的充要条件. ()

(2) 已知 $p: x=2, q: x^2-4x+4=0$, 则 p 是 q 的充要条件. ()

(3) 已知 $p: x=0$ 且 $y=0, q: x^2+y^2=0$, 则 p 是 q 的充要条件. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 充要条件的判断

例 1 下列各题中, 试分别指出 p 是 q 的什么条件.

(1) $p: ab=0, q: a=0$;

(2) p : 四边形的对角线相等, q : 四边形是正方形;

(3) $p: a+5$ 是无理数, $q: a$ 是无理数;

(4) $p: A\subseteq B, q: A\cup B=B$.

[素养小结]

判断 p 是 q 的充要条件的两种思路:

(1) 命题角度: 判断 p 是 q 的充要条件, 主要是判断 $p \Rightarrow q$ 及 $q \Rightarrow p$ 是否成立. 若 $p \Rightarrow q$ 成立, 则 p 是 q 的充分条件, 同时 q 是 p 的必要条件; 若 $q \Rightarrow p$ 成立, 则 p 是 q 的必要条件, 同时 q 是 p 的充分条件; 若二者都成立, 则 p 与 q 互为充要条件.

(2) 集合角度: 关于充分条件、必要条件、充要条件, 当不容易判断 $p \Rightarrow q$ 及 $q \Rightarrow p$ 是否成立时, 也可以从集合角度去判断, 结合集合中“小集合 \Rightarrow 大集合”的关系来理解, 这对解决与逻辑有关的问题大有益处.

此外, 对于较复杂的关系, 常用 $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ 等符号进行传递, 画出它们的综合结构图, 可降低解题难度.

◆ 探究点二 充要条件的证明

例 2 [2024 · 重庆八中高一期中] 已知 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c , 其中 $a = 2$. 求证: $\triangle ABC$ 为等边三角形的充要条件是 $b^2 + c^2 - 2(b + c) = bc - 4$.

变式 求证: 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一个根为 1 的充要条件是 $a + b + c = 0$.

[素养小结]

证明充要条件时要从充分性和必要性两个方面分别证明, 首先分清哪个是条件, 哪个是结论, 然后确定推出方向, 即充分性需要证明“条件” \Rightarrow “结论”, 必要性需要证明“结论” \Rightarrow “条件”.

◆ 探究点三 充分条件、必要条件、充要条件的应用

例 3 已知集合 $A = \{x \mid 2m \leq x \leq m + 3\}$, $B = \{x \mid -2 < x < 1\}$. 若 $p: x \in B, q: x \in A$, 且 p 是 q 的充分不必要条件, 求 m 的取值范围.

变式 [2024 · 河北唐山十县联盟高一期中] 已知集合 $A = \{x \mid 4 < x \leq 8\}$, $B = \{x \mid 5 - m^2 \leq x \leq 5 + m^2\}$. 设 $p: x \in A, q: x \in B$, 若 p 是 q 的必要不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

[素养小结]

应用充分不必要条件、必要不充分条件及充要条件求参数值(范围)的一般步骤:

(1) 根据已知将充分不必要条件、必要不充分条件或充要条件转化为集合间的关系;

(2) 根据集合间的关系构建关于参数的方程(组)或不等式(组)求解.